$\tau: V^n \to W^m \quad (\tau, S, S')$ πίνακας

S βάσεις S'

$\tau: V^n \to W^m \quad (\tau, S, S')$

S βάσεις S'

$\tau': V^n \to W^m \quad (\tau', S, S')$

S βάσεις S'

$\tau': W^m \to Z^k \quad (\tau', S', S'')$

S' βάσεις S''

$(\tau+\tau'): V^n \to W^m$

S βάσεις S'

$\tau'\tau: V^n \to Z^k \quad (\tau'\tau, S, S'')$

S βάσεις S''

$$(\tau'\tau, S, S'') = (\tau', S', S'')(\tau, S, S')$$

Δηλαδή ο πίνακας της σύνθεσης σε απεικόνιση ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων $(\tau, S, S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\tau(S', S'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Θέμα εξετάσεων

Π.χ. $\tau: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\tau(x,y,z) = (x-y, x+y+z, 2x+z)$

(i) Να βρεθεί ο πίνακας της τ ως προς τις κανονικές βάσεις

$S = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

$\tau(1,0,0) = (1,1,2) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$\tau(0,1,0) = (-1,1,0) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$\tau(0,0,1) = (0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

(ii) Να βρεθεί ο πίνακας της τ ως προς τις βάσεις

$S' = ((1,0,0), (0,1,0), (1,1,-2))$

$S'' = ((1,1,2), (-1,1,0), (0,0,1))$

$\tau(1,0,0) = (1,1,2) = 1(1,1,2) + 0(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

$\tau(0,1,0) = (-1,1,0) = 0(1,1,2) + 1(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

$\tau\underbrace{(1,1,-2)}_{\in Ker\tau} = (0,0,0) = 0(1,1,2) + 0(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

(iii) Εξετάστε αν οι πίνακες που βρήκατε συνδέονται μεταξύ τους.

$(\tau, S, S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(T, S', S'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T = 1 \cdot T \cdot 1_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (T, S, S) = (1 \cdot T \cdot 1, S, S) =$
$= (1, S'', S)(T, S', S'')(1, S, S')$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^3 \\ S & \xrightarrow{(T,S,S)} & S \\ \downarrow & & \uparrow \\ S' & \xrightarrow{(T,S',S'')} & S'' \end{array}$$

$(1, S, S')$ $\quad (1, S'', S)$

$$(1 \cdot T \cdot 1, S, S) = (1, S'', S)(T, S', S'')(1, S, S')$$

(iv) Να βρεθούν οι πίνακες αλλαγής βάσεων.

$1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

S βάσεως S'

$(1,0,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,1,-2) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(1,1,-2)$

$(0,1,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(1,1,-2)$

$(0,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,1,-2)$

$= \frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(1,1,-2)$

$$(1, S, S') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

S'' βάσεως S

$(1,1,2) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$(-1,1,0) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$(0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$

Τελικά οι πίνακες συνδέονται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\ker T = \{(y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-2) \rangle$

$T(x,y,z) = (x-y, x+y+z, 2x+z)$

$x = y$

$z = -2x = -2y$

$x + y + z = 0 \Rightarrow \cancel{y + y - 2y = 0}$

Πόρισμα Μία γρ. απεικ. $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός αν ο πίνακας της T ως προς κάποιες βάσεις.

Απόδειξη: $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad (T,S,S')$

S βάσεις S'

T ισομορφισμός (1-1, επί $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{\vec{0}\}$, επί)

$\exists\, T':\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε $T'T = 1$ κ' $TT' = 1$

$T' = T^{-1}$

$(T,S,S') \quad (T',S',S)$

$(\underbrace{T'T}_{1},S,S)$ = ταυτοτικός πίνακας $I_{n\times n}$

(TT',S',S') = ταυτοτικός

Δηλαδή

$$(T'T,S,S) = (T',S',S)(T,S,S') = I_{n\times n}$$
$$(T,S,S')(T',S',S) = I_{n\times n}$$

Άρα οι πίνακες (Θ) είναι αντιστρέψιμοι

$\Leftarrow$ Υποθέτουμε ότι οι πίνακες (Θ) είναι αντιστρέψιμοι κ' δείχνουμε ότι ο T είναι ισομορφισμός

Πόρισμα: Για να εξετάσουμε αν μία γραμμική απεικόνιση $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός, βρίσκουμε τον πίνακά της ως προς κάποιες βάσεις κ' εξετάζουμε αν ο ανηγμένος κλιμακωτός είναι ο ταυτοτικός

Πχ Δίνεται η απεικόνιση $T:\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ κ' οι βάσεις $S=(1+x^3, x, x+x^3, x^2+x^3)$ κ' $S'=(1,x,x^2,x^3)$

Ο πίνακας της T ως προς τις προηγούμενες βάσεις είναι

$$(T,S,S') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Να εξετασθεί αν η T είναι $\cong$

(ii) Να βρεθεί ο τύπος της T

(iii) Να βρεθεί η εικόνα της $1-2x+3x^2$

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) (T, S, S')

$$\left.\begin{aligned} T(1+x^3) &= 1\cdot 1+0\cdot x+0x^2+1\cdot x^3 = 1+x^3 \\ T(x) &= 0\cdot 1-1\cdot x+0\cdot x^2+1\cdot x^3 = -1+x^3 \\ T(x+x^3) &= 0\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3 = x \\ T(x^2+x^3) &= 0\cdot 1+1\cdot x+3\cdot x^2-1\cdot x^3 = x+3x^2-x^3 \end{aligned}\right\} (**)$$

Θέλουμε $T(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)$

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3 = \underset{\alpha}{\kappa}(1+x^3)+\lambda x+\mu(x+x^3)+\underset{\gamma}{\nu}(x^2+x^3)$$

$\alpha=\kappa$

$\beta=\lambda-\mu \Rightarrow \lambda=\beta-\mu \Rightarrow \lambda=\beta-\delta+\alpha+\gamma$

$\gamma=\nu$

$\delta=\kappa+\mu+\nu \Rightarrow \delta=\alpha+\mu+\gamma \Rightarrow \mu=\delta-\alpha-\gamma$

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3=\alpha(1+x^3)+(\alpha+\beta+\gamma-\delta)x+(\delta-\alpha-\gamma)(x+x^3)+\gamma(x^2+x^3)$$

$$T(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3) \overset{\gamma\rho}{=} \alpha T(1+x^3)+(\alpha+\beta+\gamma-\delta)T(x)+(\delta-\alpha-\gamma)T(x+x^3)+\gamma T(x^2+x^3)$$

$$\overset{**}{=} \alpha(1+x^3)+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(-x+x^3)+(\delta-\alpha-\gamma)x+\gamma(x+3x^2-x^3)=$$

$= a + (-a-\beta-\gamma+\delta+\delta-a-\cancel{\gamma}+\cancel{\gamma})x + 3\gamma x^2 + (a+a+\beta+\cancel{\gamma}-\delta-\cancel{\gamma})x^3 =$

$= a + (2a-\beta-\gamma+2\delta)x + 3\gamma x^2 + (2a+\beta-\delta)x^3$

$T(\overset{a}{1} - \overset{\beta}{2}x + \overset{\gamma}{3}x^2) = 1 + (-2+2-3)x + 9x^2 = 1 - 3x + 9x^2$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική

$\dim \operatorname{Ker} = k \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim T(\mathbb{R}^n) = n - k$

Βρες βάση του Ker $= \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

Θέλουμε $n-k$ γρ. ανεξ. ώστε να την κάνουμε βάση του $\mathbb{R}^n$ όλα γρ. ανεξ.

$\mathbb{R}^n = \langle v_1', v_2', \dots, v_{n-k}', v_1, \dots, v_k \rangle$

$S = (v_1', v_2', \dots, v_{n-k}', v_1, \dots, v_k)$

$T(\mathbb{R}^n) = \langle T(v_1'), T(v_2'), \dots, T(v_{n-k}'), \overset{=0}{T(v_1)}, \dots, T(v_k)^{=0} \rangle = \langle T(v_1'), T(v_2'), \dots, T(v_{n-k}') \rangle$

βάση της εικόνας

$w_1 = T(v_1')$

$w_2 = T(v_2')$

$w_{n-k} = T(v_{n-k}')$

γρ. ανεξ. — τα επεκτείνουμε σε βάση του $\mathbb{R}^m$

w_{n-k+1}

$\vdots$

w_m

$S' = (w_1, \dots, w_{n-k}, w_{n-k+1}, \dots, w_m)$

Να βρούμε τον πίνακα της T ως προς αυτές τις βάσεις (T, S, S')

$T(v_1') = 1 \cdot w_1 + 0 w_2 + \dots + 0 w_m$

$T(v_2') = 0 w_1 + 1 \cdot w_2 + \dots + 0 w_m$

$T(v_{n-k}') = 0 w_1 + \dots + 1 w_{n-k} + 0 w_{n-k+1} + \dots + 0 w_m$

$T(v_1) = 0 w_1 + \dots + 0 w_m$

$\vdots$

$T(v_k) = 0 w_1 + \dots + 0 w_m$

$$(T, S, S') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & \\ & & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle n-\kappa \end{array}$$

$\operatorname{rank}(T, S, S') = n - \kappa = n - \kappa = n - \dim \operatorname{Ker} T$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γρ. απεικ. με $\dim \operatorname{Ker} T = \kappa$. Τότε υπάρχουν βάσεις S του $\mathbb{R}^n$ κ' S' του $\mathbb{R}^m$ ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές να έχει μορφή